PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE - 2004

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Determinar el punto de inflexión de abscisa positiva de la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en este punto. ¿Cuál es la posición de la curva respecto de la recta tangente?

$$\underline{y'=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}} \;;;$$

$$y''=\frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)^2-(-2x)\cdot 2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-2-2x^2+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=$$

$$\underline{=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}=y''}$$

$$y''=0\Rightarrow 6x^2-2=0\;;;\;3x^2-1=0\;;;\;x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow \underline{x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}}\;;;\;x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para que exista el punto de inflexión es necesario que no se anule la tercera derivada para ese valor:

$$y'''=\frac{12x\cdot\left(1+x^2\right)^3-\left(6x^2-2\right)\cdot 3\cdot\left(1+x^2\right)^2\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^6}=\frac{12x\cdot\left(1+x^2\right)-6x\cdot\left(6x^2-2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{12x+12x^3-36x^3+12x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{24x-24x^3}{\left(1+x^2\right)^4}=\underline{\frac{24x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=y'''}$$

$$y'''_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{24\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{8\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^4}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{P.\ I.\ \ para\ \ x=\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

$$y_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{P.I.\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)}}$$

La recta que pasa por el punto de inflexión tiene por pendiente el valor de la primera derivada para ese punto:

$$y'=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\ \Rightarrow\ m=y'_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{16}=\underline{-\frac{3\sqrt{3}}{8}=m}$$

$$y-y_0=m\left(x-x_0\right)\Rightarrow y-\frac{3}{4}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ ;;\ 8y-6=-3\sqrt{3}\left(\frac{3x-\sqrt{3}}{3}\right)\ ;;$$

$$8y-6=-\sqrt{3}\left(3x-\sqrt{3}\right)\ ;;\ 8y-6=-3\sqrt{3}\,x+3=0\ ;;\ \underline{\underline{t\equiv 3\sqrt{3}\,x+8y-9=0}}$$

Para interpretar la posición de la tangente con respecto a la curva, estudiamos la concavidad y convexidad de la misma en el entorno del punto de inflexión estudiado:

$$y''=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^2}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\underline{Para\ \ x<\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y''<0\Rightarrow Cóncava\ \ (\cap)}\\[2ex]\underline{Para\ \ x>\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y''>0\Rightarrow Convexa\ \ (\cup)}\end{cases}$$

De lo anterior se deduce que:

<u>A la izquierda del punto de inflexión está la curva por encima de la recta y a la derecha, al contrario.</u>

****

2º) Decir para que valores de k el siguiente sistema es compatible determinado. ¿Cómo es el sistema para k = 2?

$$\left.\begin{array}{l}(1-k)x+(2k+1)y+(2k+2)z=k \\ kx+ky=2k+2 \\ 2x+(k+1)y+(k-1)z=9-2k+k^2\end{array}\right\}$$

Para que el sistema sea compatible determinado, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, es necesario que la matriz de coeficientes tenga rango tres, igual que la matriz ampliada y también igual al número de incógnitas; es decir, que el determinante de la matriz de coeficientes tiene que ser distinto de cero:

$$M=\begin{pmatrix}1-k & 2k+1 & 2k+2 \\ k & k & 0 \\ 2 & k+1 & k-1\end{pmatrix} \;;;\; |M|=\begin{vmatrix}1-k & 2k+1 & 2k+2 \\ k & k & 0 \\ 2 & k+1 & k-1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1-k & 2k+1 & 2k+2 \\ k & k & 0 \\ 2 & k+1 & k-1\end{vmatrix}=k(1-k)(k-1)+2k(k+1)^2-4k(k+1)-k(k-1)(2k+1)=$$

$$=k(k-1-k^2+k)+2k(k^2+2k+1)-4k^2-4k-k(2k^2+k-2k-1)=$$

$$=-k^3+2k^2-k+2k^3+4k^2+2k-4k^2-4k-2k^3+k^2+k=-k^3+3k^2-2k=$$

$$=-k(k^2-3k+2)=0 \;;;\; \underline{k_1=0}$$

$$k^2-3k+2=0 \;;;\; k=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow \underline{k_2=2} \;;;\; \underline{k_3=1}$$

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ es\ \ Compatibla\ \ Determinado\ \ \forall k\in R,\ \ tal\ \ que\ \ \{k\neq 0,\ k\neq 2,\ k\neq 1\}}}$$

Para k = 2 el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r}-x+5y+6z=2 \\ x+y=3 \\ 2x+3y+z=9\end{array}\right\}.$

La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 9\end{pmatrix}$. Veamos cuál es su rango:

$$\{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -9+6+30-4+9-45 = 26-49 = -13 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3.

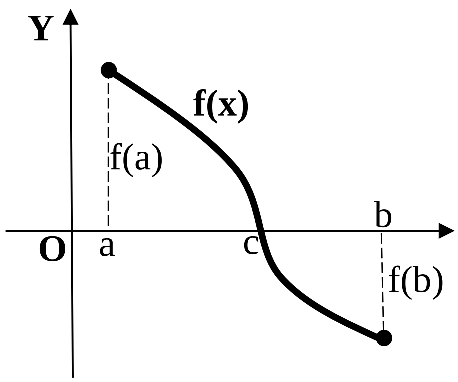
$$\underline{\underline{Para\ \ k=2\ \Rightarrow\ Rango\ \ M \neq Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

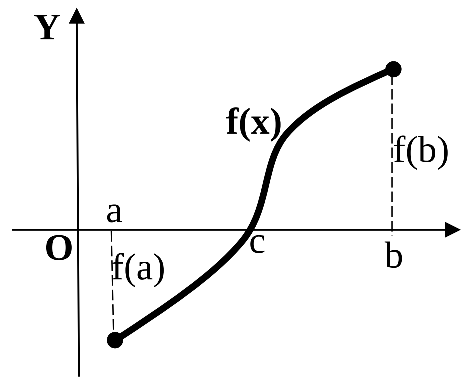
****

3º) Enunciar el Teorema de Bolzano. Dar un ejemplo que demuestre que el Teorema de Bolzano requiere que la función sea continua en el intervalo $[a,\ b]$.

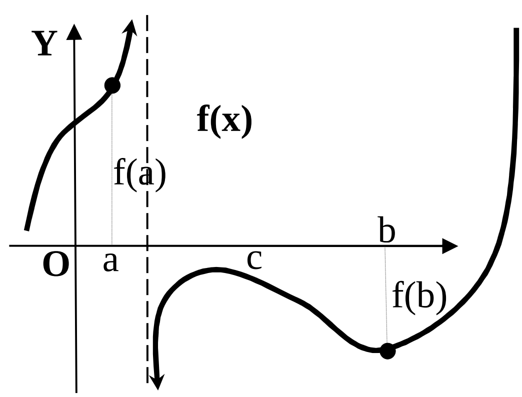
El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".





Si una función f es no es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, no se puede asegurar que exista al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c)=0$; esto es evidente en el grafico siguiente:



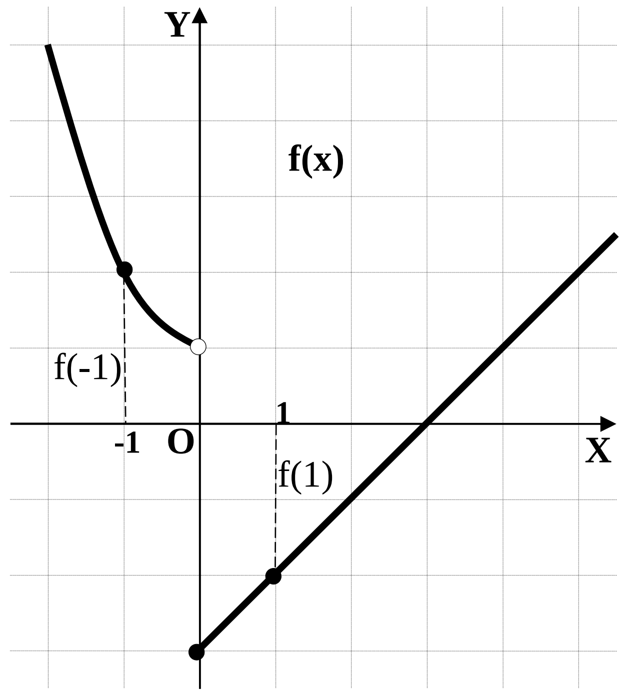
Como puede observarse, la función f(x) cumple las condiciones del teorema, excepto la de ser continua, y en este caso no existe ningún valor del intervalo $[a,\ b]$ para el cual se anule la función.

Un ejemplo puede ser la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ -x-3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ en el intervalo $[-1,\ 1]$.

En los extremos del intervalo la función toma valores de distinto signo:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 > 0 \;\; ;; \;\; f(1) = 1 - 3 = -2 < 0$$

Sin embargo no existe ningún valor $c \in (-1,\ 1)$ para el cual se anule la función, como puede comprobarse en el gráfico siguiente.



****

4º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-a}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases}$, calcular el valor de a de tal manera que las rectas se corten. Determinar el punto de corte.

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta s la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-z=-\lambda \\ \underline{z=1-2\lambda} \end{array}\right\} \to y = z-\lambda = \underline{1-3\lambda} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-3\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de cada una de las rectas pueden ser:

$$\text{Recta } r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \underline{\overrightarrow{u} = (-2,\ -1,\ 2)} \\ \\ \underline{A(a,\ -1,\ -1)} \end{array} \right\} \;;;\; \text{Recta } s \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \underline{\overrightarrow{v} = (1,\ -3,\ -2)} \\ \\ \underline{B(0,\ 1,\ 1)} \end{array} \right\}$$

El vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen el punto de r, A(a, -1, -1) y como extremo el punto de s, B(0, 1, 1) es:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 1) - (a,\ -1,\ -1) = \underline{(-a,\ 2,\ 2) = \overrightarrow{w}}$$

Si los tres vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son coplanarios, las rectas están en un mismo plano y (como no son paralelas) se cortan, por tanto es necesario que el determinante que forman los tres vectores sea nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -a & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; 12+4-2a-6a-8+2=0 \;;;\; -8a+10=0 \;;;\; \underline{\underline{a=\frac{5}{4}}}$$

El punto de corte se puede obtener sustituyendo en r los valores de x, y, z de s:

$$r \equiv \frac{\lambda - \frac{5}{4}}{-2} = \frac{1-3\lambda+1}{-1} = \frac{1-2\lambda+1}{2} \Rightarrow \frac{2-3\lambda}{-1} = \frac{2-2\lambda}{2} \;;;\; 2-3\lambda = -1+\lambda \;;;$$

$$3 = 4\lambda \;;;\; \lambda = \frac{3}{4} \Rightarrow \left\{ x = \frac{3}{4} \;;;\; y = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4} \;;;\; z = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(\frac{3}{4},\ -\frac{5}{4},\ -\frac{1}{2}\right)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera la función $f(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$, con $0 < a < b < c$. Demostrar que la ecuación $f(0) = 0$ tiene tres raíces reales.

De la observación de la función expresada factorialmente se deduce que:

$$f(0) = f(a) = f(b) = f(c) = 0$$

Como f(x) es una función polinómica es continua en su dominio que es R, por lo cual le es aplicable el Teorema de Rolle a cualquier intervalo finito.

Aplicando sucesivamente el Teorema de Rolle:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ \\ f(a)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists m \in (0,\ a) \Rightarrow f'(m) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{m\ \ es\ \ una\ \ raíz\ \ real\ \ de\ \ f(0)}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=0 \\ \\ f(b)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists n \in (a,\ b) \Rightarrow f'(n) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{n\ \ es\ \ una\ \ raíz\ \ real\ \ de\ \ f(0)}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(b)=0 \\ \\ f(c)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists p \in (b,\ c) \Rightarrow f'(p) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{p\ \ es\ \ una\ \ raíz\ \ real\ \ de\ \ f(0)}}$$

****

2º) Calcular los puntos de la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ que equidistan de los siguientes planos: $\pi \equiv 3x + 4y = 1$ y $\pi' \equiv 4x - 3z = 1$.

La recta r expresada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de la recta r es $P(-1+2\lambda,\ 1+3\lambda,\ 2\lambda)$.

La distancia de un punto a un plano es: $d(P,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicando la fórmula a los planos π y π':

$$d(P,\ \pi) = \frac{|3(-1+2\lambda) + 4(1+3\lambda) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} \ ;; \ d(P,\ \pi') = \frac{|4(-1+2\lambda) - 3(2\lambda) - 1|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} \ ;;$$

$$d(P,\ \pi) = d(P,\ \pi') \ \Rightarrow \ \frac{|-3 + 6\lambda + 4 + 12\lambda - 1|}{5} = \frac{|-4 + 8\lambda - 6\lambda - 1|}{5} \ ;;$$

$$|18\lambda| = |2\lambda - 5| \ \Rightarrow \begin{cases} 18\lambda = 2\lambda - 5 \ ;; \ 16\lambda = -5 \ ;; \ \underline{\lambda_1 = -\frac{5}{16}} \\ \\ 18\lambda = -2\lambda + 5 \ ;; \ 20\lambda = 5 \ ;; \ \underline{\lambda_2 = \frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{16} \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda = -1 - \frac{5}{8} = -\frac{13}{8} \\ y = 1 + 3\lambda = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \\ z = 2\lambda = -\frac{5}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \ \underline{\underline{P_1\left(-\frac{13}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{5}{8}\right)}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y = 1 + 3\lambda = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \\ z = 2\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \ \underline{\underline{P_2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{1}{2}\right)}}$$

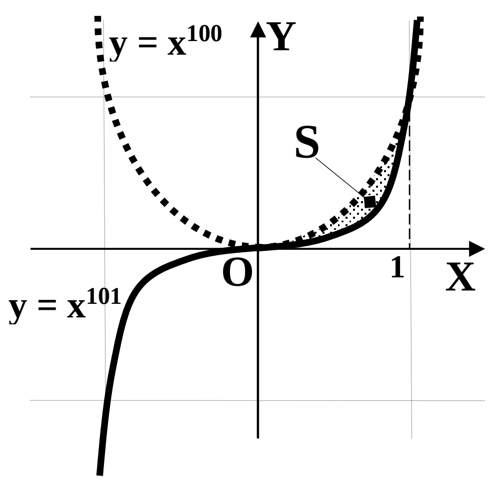
****

3º) Hacer un dibujo del recinto limitado por las curvas $y = x^{100}$ e $y = x^{101}$. Calcular el área de este recinto.

Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{100} \\ y = x^{101} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{100} = x^{101} \;\;;;\;\; x^{100} - x^{101} = 0 \;\;;;\;\; x^{100}(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^{100} = 0 \to x_1 = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ \\ 1 - x = 0 \to x_2 = 1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 1)} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la primera función es par y la segunda impar, es decir, que son simétricas con respecto al eje Y la primera y con respecto al origen la segunda, la representación gráfica es, aproximadamente, la indicada en la figura.



Para determinar el área tendremos en cuenta que en el intervalo $(0,\ 1)$ todas las ordenadas de la función $y = x^{100}$ son mayores que las de la función $y = x^{101}$, como a continuación se demuestra, tomando un valor intermedio del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{100} \Rightarrow y_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}} \\ \\ y = x^{101} \Rightarrow y_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{101} = \frac{1}{2^{101}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{100} > x^{101}, \\ \\ \forall x \in (0,\ 1) \end{array}\right\}$$

$$S = \int_0^1 x^{100} \cdot dx - \int_0^1 x^{101} \cdot dx = \int_0^1 \left(x^{100} - x^{101}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102}\right]_0^1 = \left(\frac{1^{100}}{101} - \frac{1^{102}}{102}\right) - 0 =$$

$$= \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \frac{102 - 101}{101 \cdot 102} = \underline{\underline{\frac{1}{10302}\ u^2 = S}}$$

****

4º) Determinar todas las matrices A, tales que $A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot A$. De estas matrices, determinar las que tienen la suma de todos sus elementos igual a cero.

Sea la matriz pedida $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; sería: $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$;;

$$\begin{pmatrix}a+b & a\\ c+d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ a & b\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\left.\begin{cases}a+b=a+c\\ a=b+d\\ c+d=a\\ \underline{c=b}\end{cases}\right\}\;\Rightarrow\;\underline{\underline{A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a-b\end{pmatrix}\;;;\;\forall\{a,\ b\}\in R}}$$

Las matrices cuya suma de todos sus elementos es cero son:

$$a+2b+a-b=0\;;;\;2a+b=0\;;;\;\underline{b=-2a}\;\;\Rightarrow\;\;\underline{\underline{A=\begin{pmatrix}a & -2a\\ -2a & 3a\end{pmatrix}}}$$

****